ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH THỊ TRANG

THUẬT TOÁN LAI GHÉP GIẢI BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH NHIỀU TẬP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Nguyễn Bường

Thái Nguyên – 2021

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Nguyễn Bường (Viện Công nghệ Thông tin-Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán, nhà trường và các phòng chức năng của trường, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn anh chị em trong lớp cao học và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

H	không gian Hilbert
X	không gian Banach
$\langle .,. \rangle$	tích vô hướng trên H
$\|.\|$	chuẩn trên H
$\cup$	phép hợp
$\cap$	phép giao
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm
I	toán tử đồng nhất
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$Fix(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

"Bất đẳng thức biến phân" được nảy sinh trong quá trình nghiên cứu và giải các bài toán thực tế như bài toán cân bằng trong kinh tế, tài chính, bài toán mạng giao thông, lý thuyết trò chơi, phương trình vật lý toán ... Bài toán này được giới thiệu lần đầu tiên bởi Hartman và Stampacchia vào năm 1966 trong tài liệu [5]. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều, cũng như vô hạn chiều cùng với các ứng dụng của nó được giới thiệu khá chi tiết trong cuốn sách "An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications" của D. Kinderlehrer và G. Stampacchia xuất bản năm 1980 [7].

Bất đẳng thức biến phan trên tập nghiệm của một bài toán khác thường được gọi là bất đẳng thức biến phân hai cấp. Gần đây đã có nhiều người làm toán trong và ngoài nước quan tâm đến bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách (đa tập), do lớp bài toán này có thể áp dụng để giải một số lớp bài toán khác, đặc biệt là các bài toán liên quan đến xử lý tín hiệu, xử lý hình ảnh trong Y học.

Mục đích của luận văn là trình bày lại các kết quả của Wang và các cộng sự trong tài liệu [14] về một phương pháp lặp xoay vòng tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách đa tập trong không gian Hilbert.

Nội dung chính của luận văn được cấu trúc thành hai chương, trong đó: Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về không gian Hilbert, ánh xạ không giãn và bất đẳng thức biến phân. Chương 2 trình bày lại chi tiết các kết quả của Wang và các cộng sự về phương pháp lặp kiểu đường dốc nhất kết hợp với phương pháp CQ xấp xỉ nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách đa tập trong không gian Hilbert.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm năm mục chính. Mục 1.1 đề cập đến một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert thực. Mục 1.2 giới thiệu sơ lược một số kết quả về bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn. Mục 1.4 và 1.4 đề cập đến bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert. Mục 1.5 giới thiệu một số bổ đề bổ trợ cần sử dụng trong Chương 2 của luận văn. Nội dung của chương này phần lớn được tham khảo từ các tài liệu [1], [2] và [7].

1.1. Một số đặc trưng của không gian Hilbert

Ta luôn giả thiết H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng được kí hiệu là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn được kí hiệu là $\|.\|$.

Mệnh đề 1.1. *Trong không gian Hilbert thực H ta luôn có đẳng thức sau*

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle,$$

với mọi $x, y, z \in H$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle &= \langle y,y\rangle + \langle z,z\rangle + 2\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle - 2\langle x,y\rangle \\
&= [\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle] \\
&\quad + [\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle + \langle z,z\rangle] \\
&= \|x-y\|^2 + \|x-z\|^2.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.2. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi $x, y \in H$ và mọi $\lambda \in [0,1]$, ta có*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2 \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2) \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.3. *Trong không gian Hilbert thực H, ta luôn có*

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle$$

với mọi $x, y \in H$.

Chứng minh. Với mọi $x, y \in H$, ta có

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + 2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle.\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Nhắc lại rằng, dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu về phần tử $x \in H$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

với mọi $y \in H$. Từ tính liên tục của tích vô hướng, suy ra nếu $x_n \to x$, thì $x_n \rightharpoonup x$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn xét không gian $l^2 = \left\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ và $\{e_n\} \subset l^2$, được cho bởi

$$e_n = (0, ..., 0, \underset{\text{vị trí thứ n}}{1}, 0, ..., 0, ...),$$

với mọi $n \geq 1$. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, với mỗi $y \in H$, từ bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2 < \|y\|^2 < \infty.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, y\rangle = 0$, tức là $e_n \rightharpoonup 0$. Tuy nhiên, $\{e_n\}$ không hội tụ về 0, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$.

Ta biết rằng mọi không gian Hilbert H đều thỏa mãn điều kiện của Opial, tính chất này được thể hiện trong mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.4. *Cho H là một không gian Hilbert thực và $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ thỏa mãn điều kiện $x_n \rightharpoonup x$, khi $n \to \infty$. Khi đó, với mọi $y \in H$ và $y \neq x$, ta có*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\{x_n\}$ bị chặn.

Ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - y\|^2 &= \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle \\ &> \|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle.\end{aligned}$$

Vì $x \neq y$, nên

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 &> \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, ta nhận được

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 1.5. *Mọi không gian Hilbert thực H đều có tính chất Kadec-Klee, tức là nếu $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ trong H thỏa mãn các điều kiện $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \to \|x\|$, thì $x_n \to x$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Ta có

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2$$

$$\to 0, \ n \to \infty.$$

Suy ra $x_n \to x$, khi $n \to \infty$. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 1.6. *Cho C là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, tồn tại duy nhất phần tử $x^* \in C$ sao cho*

$$\|x^*\| \le \|x\| \text{ với mọi } x \in C.$$

Chứng minh. Thật vậy, đặt $d = \inf\limits_{x \in C} \|x\|$. Khi đó, tồn tại $\{x_n\} \subset C$ sao cho $\|x_n\| \longrightarrow d, \ n \longrightarrow \infty$.

Từ đẳng thức hình bình hành, ta có

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\|\frac{x_n + x_m}{2}\|$$

$$\le (\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4d^2 \longrightarrow 0,$$

khi $n, m \longrightarrow \infty$. Do đó $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong H. Suy ra tồn tại $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in C$ (do $\{x_n\} \subset C$ và C là tập đóng). Do chuẩn là hàm số liên tục nên $\|x^*\| = d$.

Tiếp theo ta chỉ ra tính duy nhất. Giả sử tồn tại $y^* \in C$ sao cho $\|y^*\| = d$. Ta có

$$\begin{aligned}\|x^* - y^*\|^2 &= 2(\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2) - 4\|\frac{x^* + y^*}{2}\|^2 \\ &\le 2(d^2 + d^2) - 4d^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Suy ra $x^* = y^*$. Vậy tồn tại duy nhất một phần tử $x^* \in C$ sao cho $\|x^*\| = \inf_{x \in C} \|x\|$. $\square$

Từ Mệnh đề 1.6, ta có mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.7. *Cho C là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, với mỗi $x \in H$, tồn tại duy nhất phần tử $P_C x \in C$ sao cho*

$$\|x - P_C(x)\| \le \|x - y\| \text{ với mọi } y \in C.$$

Chứng minh. Vì C là tập lồi, đóng và khác rỗng nên $x - C$ cũng là tập lồi, đóng và khác rỗng. Do đó, theo Mệnh đề 1.6, tồn tại duy nhất một phần tử $P_C \in C$ sao cho

$$\|x - P_C(x)\| \le \|x - y\| \text{ với mọi } y \in C.$$

$\square$

Định nghĩa 1.1. Phép cho tương ứng mỗi phần tử $x \in H$ một phần tử $P_C x \in C$ xác định như trên được gọi là phép chiếu mêtric từ H lên C.

Ví dụ 1.1. Cho $C = \{x \in H : \langle x, u \rangle = y\}$, với $u \neq 0$. Khi đó

$$P_C x = x + \frac{y - \langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

Ví dụ 1.2. Cho $C = \{x \in H : \|x - a\| \leq R\}$, trong đó $a \in H$ là một phần tử cho trước và R là một số dương. Khi đó, ta có:

$$P_C x = \begin{cases} x \quad \text{nếu } \|x - a\| \leq R, \\ a + \dfrac{R}{\|x - a\|}(x - a) \text{ nếu } \|x - a\| > R. \end{cases}$$

Mệnh đề dưới đây cho ta một điều kiện cần và đủ để ánh xạ $P_C : H \longrightarrow C$ là một phép chiếu mêtric.

Mệnh đề 1.8. *Cho C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert H. Cho $P_C : H \longrightarrow C$ là một ánh xạ. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:*

a) *P_C là phép chiếu mêtric từ H lên C;*

b) *$\langle y - P_C x, x - P_C x \rangle \leq 0$ với mọi $x \in H$ và $y \in C$;*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử P_C là phép chiếu mêtric từ H lên C, tức là $\|x - P_C x\| = \inf_{u \in C} \|x - u\|$. Với mọi $x \in H$, $y \in C$ và với mọi $\alpha \in (0, 1)$, đặt $y_\alpha = \alpha y + (1 - \alpha) P_C x$. Vì C lồi nên $y_\alpha \in C$ và do đó

$$\|x - P_C x\| \leq \|y_\alpha - x\|.$$

Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} \|x - P_C x\|^2 &\leq \|\alpha(y - P_C x) - (x - P_C x)\|^2 \\ &= \alpha^2 \|y - P_C x\|^2 + \|x - P_C x\|^2 - 2\alpha \langle y - P_C x, x - P_C x \rangle. \end{aligned}$$

Từ đó, ta nhận được

$$2\langle y - P_C x, x - P_C x \rangle \leq \alpha \|y - P_C x\|^2.$$